বীজগণিত

বর্গের সূত্রাবলীঃ

✡ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

✡ $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ------(x)

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

✡ $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ------(y)

$\Rightarrow a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$

✡ $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ [∵ (x) +(y)]

$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$

✡ $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ [∵ (x) − (y)]

$\Rightarrow (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

$\Rightarrow (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ $\Rightarrow ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$

✡ $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\Rightarrow a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$

✡$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 = 2\,(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

ঘন এর সূত্রাবলীঃ

✡ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

✡$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$\Rightarrow a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

✡$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$\Rightarrow a^3-b^3 = (a-b)^3+3ab(a-b)$

✡ $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\Rightarrow a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}\,(a+b+c)\,\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

✡ $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3\,(a-b)(b-c)(c-a)$

উৎপাদক সূত্রঃ

✡ $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

✡ $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

✡ $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Middile term:

✡ $x^2 + qx + r$ রাশিটিকে উৎপাদন বিশ্লেষণ করতে হলে , ধ্রব রাশি q সংখ্যাটিকে এমন দুইটি উৎপাদকে (a ও b)প্রকাশ করতে হবে যার সমষ্টি বা যোগফল x এর সহগ q (q= a+b) এর সমান। এবং গুণফল ধ্রব রাশি r (r=a×b)এর সমান।

$\Rightarrow x^2 + qx + r = x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

1) q>0, r>0 হলে $(x + a)(x + b)$

2) q<0, r>0 হলে $(x - a)(x - b)$

3) q>0, r<0 হলে a ও b এর মধ্যে বড়টি + ও ছোটটি – হবে।

✡ $px^2 + qx + r = acx^2 + (bc + ad)x + bd = (ax + b)(cx + d)$

✡$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$

$= (x + a)(x + b)(x + c)$

উৎপাদকের মূল নির্নয়ের সূত্রঃ

✡ $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b) = 0$ হলে এর মুলদ্বয় হবে x = -a , x = -b ।

✡ $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α ও β হলে,⇒ $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

∴ সমীকরণ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

✡ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের এর মূলদ্বয় $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

রাশির ভাগঃ

✡ $ax^3 + bx + c$ রাশিকে (x-m) রাশি দ্বারা ভাগ কর?

এখানে (x-m) কে এমন একটি রাশি দ্বারা গুন করতে হবে যাতে গুণফলের প্রথম রাশি এবং ভাজ্য($ax^3 + bx + c$) এর প্রথম রাশির(ax^3) সমান হয় । এখন যে রাশি দ্বারা গুন করা হয়েছে সেটি ভাগফলে বসবে । এবং গুণফল ভাজ্য এর নিচে বসিয়ে বিয়োগ করতে হবে। এভাবে পর্যায়ক্রমে ভাগ করে যেতে হবে ।

যদি $P(x) = ax^3 + bx + c$

$P(x)$ কে $x - m$ দ্বারা ভাগ করি,

$$
\begin{array}{l}
x - m \,\big)\, ax^3 + bx + c \,\big(\, ax^2 + amx + am^2 + b \\
\underline{ax^3 - amx^2} \\
\qquad amx^2 + bx + c \\
\qquad \underline{amx^2 - am^2x} \\
\qquad\qquad (am^2 + b)\,x + c \\
\qquad\qquad \underline{(am^2 + b)\,x - (am^2 + b)m} \\
\qquad\qquad\qquad am^3 + bm + c
\end{array}
$$

ভাগশেষ $P(m)$ এর সমান $am^3 + bm + c$

সূচক (Exponents/Indices)

✡ $a^n = a \times a \times a \times a \times a \ldots$ (n সংখ্যক a এর গুণফল)

✡ $a^0 = (Something)^0 = 1$

✡ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

✡ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

✡ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

✡ $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$

☆ $\sqrt[\frac{1}{n}]{a} = a^n$

☆ $\sqrt[\frac{1}{n}]{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{n}{m}}$

☆ $\sqrt[\frac{1}{n}]{\frac{1}{a}} = a^{-n}$

✡ $(a^m)^n = a^{m\,n}$

✡ $(a\,b)^m = a^m . b^m$

✡ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

✡ $a^m . a^n = a^{m+n}$

✡ $\frac{a^m}{a^n}$ বা $(a^m \div a^n) = a^{m-n}$

✡ যদি $a^n = a^m$ হয় $\Rightarrow \therefore a = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

✡ যদি $a^x = a^y$ হয় $\therefore x = y$

✡ যদি $a^m = b^m$ হয় $\therefore a = b$

লগারিদম (logarithms)

✡ $\log_a n$ কে " a ভিত্তিক লগ n"পড়া হয়।

✡ শুধু ধনাত্নক সংখ্যার লগারিদম আছে। শূন্য ও ঋনাত্নক সংখ্যার লগারিদম নেই।

✡ সাধারণ লগারিদমের ভিত্তি 10 ধরা হয়। $\log_{10} M$ বোঝাতে $\log\ M$ কে বোঝায়।

✡ $a^x = n$ হলে $x = \log_a n$

$\Rrightarrow$ $x = \log_a n$ হলে $a^x = n$

✡$\log_{any\ base}\ 1 = \log\ 1 = 0$ ☆ ✡$\log_a 0 = \infty$

✡$\log_a 10 = \log\ 10 = 1$

✡$\log_a a = 1$

✡$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\Rrightarrow \log_a b \times \log_b a\ = 1$

$\Rrightarrow \log_a b \times \log_b c \times \log_c a\ = 1$

✡$\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

✡$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

✡ $\log_a M^r = r \log_a M$

✡ $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

✡$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

✡$\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log_a m$

✡$a^{{log_x}^b} = b^{{log_x}^a}$

✡$x^y = e^{y\ {log_e}^x}$

সরল সহ-সমীকরণঃ

(Simultaneous Linear Equation)

অজ্ঞাত রাশি সমূহের মান দ্বারা একাধিক যুগপৎ সিদ্ধ হলে ,সমীকরণ সমূহকে একত্রে সহ সমীকরণ বলে।

এই ধরণের অংক পরীক্ষায় MCQ হিসাবে আসলে , সামাধানের ক্ষেত্রে MCQ এর চারটি Answer Choice এ x ও y এর চারজোড়া মান দেওয়া থাকবে। এখন প্রত্যেক জোড়া মান অর্থাৎ x ও y এর মান প্রশ্নে দেওয়া দুটি সমীকরণের যে কোন একটিতে(যে সমীকরণটি অপেক্ষাকৃত সহজ) বসান। এবং দেখুন কোন মানের জন্য সমীকরণটি শূন্য হয়। যে মানের জন্য সমীকরণটি শূন্য হবে সেই মানটি অপর সমীকরণেও বসিয়ে দেখুন শূন্য হয় কিনা , যদি কোণ মানের জন্য উভয় সমীকরণ শূন্য হয় তাহলে সঠিক উত্তর হবে সেটি।

বজ্রগুণন পদ্ধতিঃ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

নির্ণায়ক পদ্ধতিঃ

$$ax + by = p$$
$$cx + dy = q$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

ধারা (Series / Progression):

সমান্তর ধারা (The Arithmetic Series)

ক্রমিক সমান্তর ধারাঃ 1(First Term) +2+3+4+......................n(Last Term)

এই ধারায় সাধারণ অন্তর (Common Difference) =Second term – first Term = 1

✡ পদসংখ্যা (Number of Terms) $= \frac{\text{শেষ পদ} - \text{প্রথম পদ}}{\text{সাধারণ অন্তর}} + 1$

✡ সমষ্টি (Sum of the Series) $= \frac{\text{শেষ পদ} + \text{প্রথম পদ}}{2} \times \text{পদসংখ্যা} = \frac{n(n+1)}{2}$

✡ গড় (Avarage of the Series) $= \frac{\text{শেষ পদ} + \text{প্রথম পদ}}{2} = \frac{n+1}{2}$

যোগত্তর/ সমান্তর ধারাঃ

a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d)+.................................n

এখানে ধারাটির ,

প্রথম পদ = a

সাধারণ অন্তর d = দ্বিতীয় পদ – প্রথম পদ

পদ সংখ্যা = n

∴ ধারার তম n পদ (শেষ পদ) = a +(n−1)d

$\Rightarrow n = \frac{\text{শেষ পদ} - 1}{d} - 1$

ধারার n তম পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

গুনোত্তর/সমানুপাত ধারাঃ

$a + ar + ar^2 + ar^3 \dots \dots \dots \dots \dots ar^{n-1}$

এখানে গুনোত্তর ধারাটির,

প্রথম পদ = a

সাধারণ অনুপাত r = $\frac{\text{দ্বিতীয় পদ}}{\text{প্রথম পদ}}$

পদ সংখ্যা = n

ধারার n তম পদ = $a \times r^{n-1}$

✡ r >0 বা 1 অর্থাৎ অনুপাত r ধনাত্মক পূর্ন সংখ্যা হলে,

ধারার n তম পদের সমষ্টি $S_n = a \times \frac{r^n - 1}{r-1}$

✡ r < 0 বা 1 অর্থাৎ অনুপাত r ঋনাত্মক বা ভগ্নাংশ (.1 -.9)সংখ্যা হলে,

ধারার n তম পদের সমষ্টি $S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$

✡ যখন -1<r<1 হলে , এবং n→∞ হলে

ধারার n তম পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a}{1-r}$

কিছু গুরুত্বপূর্ন ধারাঃ

ধারার যোগফল বা সমষ্টি = S_n

ধারাতে পদের সংখ্যা = n

ধারার n তম পদ = শেষ পদ

✡ 1+2+3+4+...................n

$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

✡ 1+3+5+7+..................$\underset{\text{শেষ পদ}}{\overset{(2n-1)}{n \text{ তম পদ}}}$

$\Rightarrow S_n =$ (পদসংখ্যা)^2 $= n^2$

✡ $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots . n^2$

$\Rightarrow S_n = \frac{1}{6} \times$ n(n-1)(2n+1)

✡ $1\ (2^0) + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 2^{n-1}$

$\Rightarrow S_n = 2^n - 1$

✡$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots n^3$

$\Rightarrow S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \{\frac{n(n+1)}{2}\}^2$

কিছু গুরুত্বপূর্ন ধারার অজানা বা পরবর্তী পদ(Hidden / Next Term) নির্ণয়ঃ

✡ 1, 4, 9, 16................ ⇒ 25[∵ $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$]

✡1 , 9 , 25, 49, 81 .... ⇒ 121[∵$1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2\ 11^2$ বিজোড় সংখ্যা ^{2}]

✡ 9 36 81 144 .... ⇒ 225[∵ x^2 , $(x+3)^2$, $(x+6)^2$]

✡ 81, 27, ... 3, 1 ⇒ 9 [∵ $3^4, 3^3, 3^2, 3^1, 3^0$]

✡ 1, 2, 3, 5, 8 , 13 , 21 , 34....... ⇒ 55[∵ যে কোণ পদ = তার পুর্বের দুটি পদের সমষ্টি]

✡ 8, 11, 17, 29, 53,..... ⇒ 101 [∵8, 8+(11-8),11+(17-11), ...]

✡ 1, 3, 6, 10, 15, 21,.... ⇒ 28 [∵ 1,(1+2),(3+3),(6+4), (10+5)]

✡ 2, 8, 18, 32,...... ⇒ 50 [∵ 2,(2+6),(8+$\underline{6+4}$),(18+$\underline{6+4+4}$), (32+$\underline{6+4+4+4}$)]

✡ 2, 4, 8, 14, 22, 32.... ⇒44 [∵ 2,(2+2),(4+$\underline{2+2}$),(8+$\underline{2+2+2}$), (14+$\underline{2+2+2+2}$)]

✡ 0, 5, 12, 21, 32..... ⇒ 45 [∵ 0,(0+5),(5+$\underline{5+2}$),(12+$\underline{5+2+2}$), (21+$\underline{5+2+2+2}$)]

✡ 13, 17, 25, 41,..... ⇒ 73 [∵ 13,$(13+2^2)$,$(17+2^3)$,$(25+2^4)$, $(41+2^5)$]

✡ 5, 7, 11, 19,..... ⇒35 [∵ 5,$(5+2^1)(7+2^2)$,$(11+2^3)$,$(19+2^4)$]

✡ 4, 6, 10, 18,.... ⇒ 34 [∵ 4,$(4+2^1)(6+2^2)$,$(10+2^3)$,$(18+2^4)$]

✡ 3, 6, 4, 9, 5, 12, 6,.... ⇒ 15 [∵ $t_1:t_3:t_5:t_7$ ⇒ 3,4,5,6| $t_2:t_4:t_6:t_8$ ⇒ 6,9,12,15]

✡ 4, 11, 8, 19, 12,..... ⇒ 27 [∵ 4,11,(t_1+4),$(t_2+8)(t_3+4)(t_4+8)$]

✡ 27, 5, 25, 8, 23, 11, 21, 14........ ⇒19

[∵ $t_3:t_5:t_7$ ⇒ (27-2),(27-4),(27-6),(27-8)| $t_4:t_6:t_8$ ⇒ (5+3),(5+6),(5+9)]

আরও কিছু গুরুত্বপূর্ন ধারাঃ নিজে নিজে চেষ্টা করুন

✡0, 9, 17, 24...35, 39, 42 ....⇒ 30

✡ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ⇒ 34

✡1, 3, 6, 9, 15, 21, ... ⇒ 28

✡1, 3, 7, ...21, 31, 43 ⇒ 13

✡10, 17, 25, 34, ... ⇒ 44

✡11, 13, 17, 19, ...25 ⇒ 23

✡ 11, 16, 26, 40.....94 ⇒ 60

✡11, 17, 13, 13, 18, 15, 15, 19...... ⇒ 17

✡ 13, 12, 14, 11, 12, 10, ... ⇒ 16

✡13, 7, 11, 5, 9, 3, 7, 1, ... ⇒ 5

✡15, 13, 12, 11, 9, 9.. ⇒ 6

✡172, 84, 40, 18, .. ⇒ 7

✡18, 12, 15, 10, 12, 8, ... ⇒ 9

✡19, 14, 17, 12, 15, 10, 13, 8, 11, ... ⇒6

✡ 19, 33, 51, 73, ... ⇒ 99

✡2, 11, 32, 65, 110, .. ⇒ 167

✡2, 3, 5, 7, 11, 13, ... ⇒ 17

✡2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, ... ⇒ 38

✡2, 9, 6, 7, ...5, 54, ⇒ 18

✡21, 18, 9, 27, 24, 12, 36, ... ⇒ 33

✡24, 8, 16, 15, 5, 10, 9, ... ⇒ 3

✡3, 10, 4, 13, 5, 16, 6, ... ⇒ 19

✡ 3, 4, 7, 7, 15, 13, 31, .. ⇒ 25

✡3, 5, 9, 15, 23, 33, ...⇒ 45

✡3, 6, 10, 30, 35, 140, 146, ... ⇒147

✡3, 7, 14, 18, 36, 40, 80, 84, ... ⇒ 168

✡3, 7, 28, 32, 8, 12, 48, ... ⇒52